BALANCE GYROSTATIQUE DE KELVIN

Question 1 : Déterminer les éléments de réduction, exprimés dans le repère R_3, au point G, du torseur cinématique du solide 4 dans son mouvement par rapport à R_0.

Par définition

$$\boxed{\{V\ (4/R_0)\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(4/R_0) \\ \vec{V}(G,4/R_0) \end{Bmatrix}}$$

Calcul de $\vec{\Omega}(4/R_0)$

$$\vec{\Omega}(4/R_0) = \vec{\Omega}(R_4/R_0) = \vec{\Omega}(R_4/R_3) + \vec{\Omega}(R_3/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$$

donc

$$\boxed{\vec{\Omega}(4/R_0) = \dot{\varphi}\vec{x}_3 + \dot{\theta}_1\vec{y}_3 + \dot{\psi}\vec{z}_1 = \left|\begin{matrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\sin\theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\psi}\cos\theta_1 \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{matrix}\right._{B_3}}$$

Calcul de $\vec{V}(G,4/R_0)$

$$\vec{V}(G,4/R_0) = \vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_{R_0} \quad \text{avec } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BG} = 2a\vec{z}_2 - a\vec{x}_3$$

d'où

$$\vec{V}(G/R_0) = 2a\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} - a\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right]_{R_0}$$

or

$$\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_0} = \left(\dot{\theta}\vec{y}_2 + \dot{\psi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{z}_2 = \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right]_{R_0} = \left(\dot{\theta}_1\vec{y}_2 + \dot{\psi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{x}_3 = \dot{\theta}\vec{z}_3 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_3$$

soit

$$\begin{aligned} \vec{V}(G/R_0) &= 2a\left[\dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_2\right] - a\left[\dot{\theta}\vec{z}_3 + \dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_3\right] \\ &= \vec{x}_3\left[2a\dot{\theta}\cos(\theta_1 - \theta)\right] + \vec{y}_3\left[a\dot{\psi}\sin\theta\right] + \vec{z}_3\left[2a\dot{\theta}\sin(\theta_1 - \theta) - a\dot{\theta}\right] \\ &= \vec{x}_3\left[2a\dot{\theta}\sin 2\theta\right] + \vec{y}_3\left[a\dot{\psi}\sin\theta\right] + \vec{z}_3\left[2a\dot{\theta}\cos 2\theta - a\dot{\theta}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V}(G/R_0) = \begin{bmatrix} 4a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ a\dot{\psi}\sin\theta \\ -4a\dot{\theta}\sin^2\theta + a\dot{\theta} \end{bmatrix}_{R_3}}$$

Question 2 : Ecrire le vecteur $\vec{\Gamma}(G/R_0)$ accélération du point G par rapport au repère R_0.

$$\vec{V}(G,4/R_0) = \vec{V}(G/R_0) = \left[\frac{d\,\vec{OG}}{dt}\right]_{R_0}$$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R0} = \left[\frac{d\vec{V}(G/R_0)}{dt}\right]_{R3} + \vec{\Omega}(R_3/R_0) \wedge \vec{V}(G/R_0)$$

$$\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{bmatrix} 4a\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta + 4a\dot{\theta}^2\cos^2\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin^2\theta + 4a\dot{\theta}^2\sin^2\theta - a\dot{\theta}^2 - a\dot{\psi}^2\sin^2\theta \\ a\ddot{\psi}\sin\theta + a\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta \\ -4a\ddot{\theta}\sin^2\theta - 8a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + a\ddot{\theta} - a\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + 4a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

soit

$$\boxed{\vec{\Gamma}(G/R_0) = \begin{bmatrix} 4a\ddot{\theta}\sin\theta\cos\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin^2\theta - a\dot{\psi}^2\sin^2\theta \\ a\ddot{\psi}\sin\theta + 2a\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\ -4a\ddot{\theta}\sin^2\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + a\ddot{\theta} - a\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \end{bmatrix}_{R_3}}$$

Question 3 : Déterminer les éléments de réduction, au point G, du torseur cinétique du solide 4 dans son mouvement par rapport à R_0.

Par définition,

$$\boxed{\{C(4/R_0)\}_G = \begin{cases} \vec{P}(4/R_0) = m_4\vec{V}(G/R_0) \\ \vec{\sigma}(G,4/R_0) = [I(G,4)]_{R_3}\,[\vec{\Omega}(4/R_0)]_{R_3} \end{cases}}$$

Calcul de $\vec{P}(4/R_0)$

$$\boxed{\vec{P}(4/R_0) = m_4 \begin{bmatrix} 4a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta \\ a\dot{\psi}\sin\theta \\ a\dot{\theta}(1-4\sin^2\theta) \end{bmatrix}_{R_3}}$$

Calcul de $\vec{\sigma}(G,4/R_0)$

$$\vec{\sigma}(G,4/R_0) = [I(G,4)]_{R3}\,[\vec{\Omega}(4/R_0)]_{R3}$$

$$[\vec{\sigma}(G,4/R_0)] = \begin{bmatrix} A_4 & 0 & 0 \\ 0 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 \end{bmatrix}_{R_3} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta \\ -\dot{\theta} \\ \dot{\psi}\sin\theta \end{bmatrix}_{R_3}$$

d'où

$$\vec{\sigma}(G,4/R_0)=\left|\begin{array}{c}A_4(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)\\ -B_4\dot{\theta}\\ B_4\dot{\psi}\sin\theta\end{array}\right._{R_3}$$

Question 4 : Déterminer les éléments de réduction, au point G, du torseur dynamique du solide 4 dans son mouvement par rapport à R_0.

Par définition,

$$\{D(4/R_0)\}_G=\begin{cases}\vec{R}_d(4/R_0)=m_4\vec{\Gamma}(G/R_0)\\ \vec{\delta}(G,4/R_0)=\dfrac{d}{dt}\left[\vec{\sigma}(G,4/R_0)\right]_{R_0}\end{cases}$$

Calcul de $\vec{\delta}(G,4/R_0)$

$$\vec{P}(4/R_0)=m_4\begin{bmatrix}4a\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta\\ a\dot{\psi}\sin\theta\\ a\dot{\theta}(1-4\sin^2\theta)\end{bmatrix}_{R_3}$$

Calcul de $\vec{\delta}(G,4/R_0)$

Si on pose

$$\vec{\sigma}(G,4/R_0)=\left[P\vec{x}_3+Q\vec{y}_3+R\vec{z}_3\right]$$

$$\vec{\delta}(G,4/R_0)=\left[\frac{dP}{dt}\vec{x}_3+\frac{dQ}{dt}\vec{y}_3+\frac{dR}{dt}\vec{z}_3\right]+P\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right]_{R_0}+Q\left[\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right]_{R_0}+R\left[\frac{d\vec{z}_3}{dt}\right]_{R_0}$$

avec

$$P=A_4(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)\quad Q=-B_4\dot{\theta}\quad R=B_4\dot{\psi}\sin\theta$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right]_{R_0}=\left(\dot{\theta}_1\vec{y}_2+\dot{\psi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{x}_3=\dot{\theta}\vec{z}_3+\dot{\psi}\sin\theta\vec{y}_3$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_3}{dt}\right]_{R_0}=\left(\dot{\theta}_1\vec{y}_2+\dot{\psi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{y}_3=-\dot{\psi}\vec{x}_1=-\dot{\psi}\sin\theta\vec{x}_3-\dot{\psi}\cos\theta\vec{z}_3$$

$$\left[\frac{d\vec{z}_3}{dt}\right]_{R_0}=\left(\dot{\theta}_1\vec{y}_2+\dot{\psi}\vec{z}_1\right)\wedge\vec{z}_3=-\dot{\theta}\vec{x}_3+\dot{\psi}\cos\theta\vec{y}_3$$

$$\vec{\delta}(G,4/R_0)=\left|\begin{array}{l}A_4(\ddot{\varphi}-\ddot{\psi}\cos\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta)\quad -B_4\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\quad +B_4\dot{\theta}\dot{\psi}\sin\theta\\ A_4(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta\quad -B_4\ddot{\theta}\quad +B_4\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\\ A_4(\dot{\varphi}-\dot{\psi}\cos\theta)\dot{\theta}\quad +B_4\dot{\theta}\dot{\psi}\cos\theta\quad +B_4(\ddot{\psi}\sin\theta+\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta)\end{array}\right._{R_3}$$

$$\vec{\delta}(G,4/R_0) = \begin{vmatrix} A_4(\ddot{\varphi} - \ddot{\psi}\cos\theta + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta) \\ A_4\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta \quad - B_4\ddot{\theta} \quad + (B_4 - A_4)\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta \\ A_4(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta)\dot{\theta} + B_4(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta) \end{vmatrix}_{R_3}$$

Question 5 : Déterminer l'énergie cinétique du solide 4 dans son mouvement par rapport à R_0.

Par définition,

$$T(4/R_0) = \frac{1}{2}\{V(4/R_0)\} \otimes \{C(4/R_0)\}$$

soit

$$T(4/R_0) = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(G,4/R_0) + \frac{1}{2}{}^t\left[\vec{\Omega}(4/R_0)\right]_{R3}\left[I(G,4)\right]_{R3}\left[\vec{\Omega}(4/R_0)\right]_{R3}$$

$$\begin{aligned} T(4/R_0) \quad &= \quad \frac{1}{2}m\left[16a^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\cos^2\theta + a^2\dot{\psi}^2\sin^2\theta + a^2\dot{\theta}^2(1+4\sin^2\theta)^2\right] \\ &+ \quad \frac{1}{2}\left[A_4(\dot{\varphi} - \dot{\psi}\cos\theta)^2 + B_4\dot{\theta}^2 + B_4\dot{\psi}^2\sin^2\theta\right] \end{aligned}$$

$$T(S/R) = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[B_4 + ma^2(16\sin^2\theta\cos^2\theta + (1+4\sin^2\theta)^2)\right] + \frac{\dot{\psi}^2}{2}\left[(B_4 + ma^2)\sin^2\theta + A_4\cos^2\theta\right]$$
$$+ \frac{1}{2}A_4\dot{\varphi}^2 - A_4\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{aligned} T(S/R) = \frac{\dot{\theta}^2}{2}\left[B_4 + ma^2(1+24\sin^2\theta)\right] + \frac{\dot{\psi}^2}{2}\left[(B_4 + ma^2)\sin^2\theta + A_4\cos^2\theta\right] \\ + \frac{1}{2}A_4\dot{\varphi}^2 - A_4\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}}$$